



## DISTRIBUIÇÃO PSEUDO-WIGNER-VILLE APLICADA AO MONITORAMENTO DE FALHAS EM ROLAMENTOS

**Antonio Almeida Silva**

Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Engenharia Mecânica

Cx. P. 10069 – CEP 58109-970 – Campina Grande, PB, Brasil

**Mario Francisco Mucheroni**

Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica

Cx. P. 359 – CEP 13560-250 – São Carlos, SP, Brasil

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma aplicação de um método de análise conjunta tempo-frequência, baseado na distribuição Pseudo-Wigner-Ville (PWVD). Este método foi aplicado ao monitoramento de falhas em rolamentos visando o desenvolvimento de técnicas de manutenção preditiva. Inicialmente são investigados os sinais de vibração correspondentes aos modelos teóricos de falhas e, em seguida, comparados com os resultados obtidos num banco de ensaios experimentais com falhas introduzidas artificialmente em rolamentos de teste. O modelo de falha é validado em situações onde a análise pelos métodos usuais não é satisfatória. São apresentados os mapas de contorno do modelo e de duas condições de falha. São discutidos os principais aspectos do desempenho do método PWVD.*

**Palavras-chave:** *Manutenção preditiva, Monitoramento de vibrações, Distribuições tempo-frequência, Mancais de rolamentos*

### 1. INTRODUÇÃO

O monitoramento de máquinas a partir da análise de sinais vibratórios já vem sendo bastante utilizado em instalações industriais de médio e grande porte, principalmente em situações onde uma parada imprevista de algum equipamento possa causar prejuízos financeiros ou de natureza ambiental. Por outro lado, detectar falhas e julgar a sua severidade requer conhecimento e habilidade do especialista no domínio das técnicas e na interpretação das medidas físicas realizadas. Dentre as várias técnicas de análise de vibrações destaca-se a análise espectral clássica, baseada na aplicação da transformada de Fourier. É uma ferramenta bastante útil para grande parte dos problemas, especialmente na análise de sinais com características periódicas e estacionárias. Em situações mais complexas, onde tem-se a combinação de mais de uma fonte de excitação somada aos ruídos transmitidos através dos suportes e das fundações das máquinas, os sinais medidos podem apresentar algumas dificuldades de análise, especialmente quando ocorrem mudanças abruptas do sinal no tempo, efeitos locais transientes ou mesmo quando os sinais apresentam características do tipo não-estacionárias. Nestes casos, faz-se necessário o uso de ferramentas mais poderosas como as

distribuições conjuntas tempo-frequência, capazes de prover informações sobre o comportamento de diferentes componentes em frequência de um sinal de vibração para cada instante de tempo (González *et al.*, 1996). Dentre as transformadas lineares mais conhecidas estão as transformadas de Fourier de curto tempo (STFT), a transformada de Gabor e a transformada de “wavelets”. Nas representações bilineares estão as distribuições de Wigner-Ville (WVD), Choi-Williams (CWD) e Cohen-Posch (CPD), dentre outras. O uso destas ferramentas pode permitir um melhor entendimento de fenômenos como desgastes, trincas e ressonâncias estruturais em componentes de máquinas, oferecendo subsídios para a manutenção preditiva.

Nos sistemas mecânicos rotativos, os rolamentos se apresentam como um dos componentes mais sensíveis ao desenvolvimento de falhas devido aos problemas a que estes são expostos como desalinhamentos e desbalanceamentos, montagens inadequadas, lubrificação deficiente, sobrecargas imprevistas, desgastes por contaminação e fadiga superficial das pistas ou elementos rolantes. Estes fatores justificam as razões pelas quais verifica-se o constante interesse pela manutenção preditiva de rolamentos. Em condições normais de operação os rolamentos estão sujeitos a várias fontes de excitação gerando sinais que apresentam características relacionadas com o estado do elemento. Inicialmente, quando o rolamento se encontra em bom estado, o sinal se apresenta como um ruído aleatório de banda larga com baixa amplitude de vibração. Em seguida, com o surgimento e desenvolvimento de uma pequena falha na pista estacionária o sinal obtido mostra alguns transientes periódicos com amplitudes praticamente invariantes no tempo, o que facilita sua análise pelos métodos baseados na aplicação da transformada de Fourier. Porém quando a falha se desenvolve na pista rotativa ou no elemento rolante, o efeito do carregamento e do meio de transmissão irão causar uma modulação na amplitude de vibração gerando um sinal cujo espectro apresenta bandas laterais mistas que dependem da posição angular da falha. Além disso, a presença de ruídos e de outras fontes de vibrações internas da máquina ou transmitidas através das fundações podem aumentar a complexidade dos sinais, dificultando a sua análise. Num estágio mais avançado de falha em rolamentos, o sinal volta a apresentar características típicas de ruído aleatório somadas a pequenos transientes. O seu espectro apresenta uma configuração de banda larga em frequências, não permitindo fazer um diagnóstico confiável da frequência característica de defeito. Neste caso, os efeitos dos impactos irão dominar o espectro. As amplitudes correspondentes se tornam altas em relação às amplitudes de vibração medidas quando os rolamentos estavam em bom estado.

## **2 MODELO DE VIBRAÇÃO PARA FALHAS EM ROLAMENTOS**

Um dos modelos que visa explicar satisfatoriamente as linhas espectrais observadas na análise de rolamentos defeituosos foi proposto por McFadden & Smith (1984) através da técnica do envelope. Este modelo foi desenvolvido para a vibração gerada por uma falha localizada na pista interna de rolamentos de esferas e está baseado em funções relacionadas à frequência de rotação, à distribuição de carga, ao meio de transmissão da vibração e ao decaimento exponencial das frequências de ressonância do sistema.

### **2.1 Modelo de vibração para carregamento constante**

A excitação produzida pelo impacto de um ponto defeituoso numa superfície é modelada pela função de impulso unitário  $\cdot(t)$ . Supondo que a pista externa do rolamento é estacionária e que a pista interna gira com velocidade de rotação constante, os impulsos gerados serão de natureza periódica com frequências características dependentes da localização da falha e da geometria do rolamento (Braun & Datner, 1979). Assumindo-se que os impactos produzidos

são distribuídos uniformemente através de uma carga unitária ao longo do rolamento, a vibração produzida pela falha pode ter como modelo uma série infinita de impulsos de igual amplitude, cujo período de repetição é igual a  $T_d = 1/f_d$ . A função trem de impulsos  $d(t)$  correspondente é representada pela equação

$$d(t) = d_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d) \quad (1)$$

A transformada de Fourier de  $d(t)$  é dada por

$$D(f) = d_o f_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_d) \quad (2)$$

onde nota-se que o espectro em frequência  $D(f)$  também é representado por uma série de impulsos, separados pela frequência característica do defeito  $f_d$ .

## 2.2 Distribuição de carga radial no rolamento

A distribuição de carga ao longo da circunferência de um rolamento sob carregamento radial é determinada pela equação de Stribeck:

$$q(\theta) = q_o [1 - (1/2\varepsilon)(1 - \cos\theta)]^n \quad (3)$$

onde  $q_o$  é a máxima intensidade de carga,  $\bullet$  é o fator de distribuição de carga,  $\theta$  é a posição angular da zona de carga e  $n = 3/2$  para rolamentos de esferas.

A função no tempo que representa a carga instantânea num ponto da pista interna do rolamento é obtida substituindo  $\theta$  por  $2\bullet f_s t$ , conforme a equação

$$q(t) = \begin{cases} q_o [1 - (1/2\varepsilon)(1 - \cos 2\pi f_s t)]^n & \text{para } |\theta| < \theta_{\max} \\ 0 & \text{para } |\theta| \geq \theta_{\max} \end{cases} \quad (4)$$

onde  $f_s$  é a frequência de rotação do eixo.

## 2.3 Modulação dos impulsos pela carga

Uma expressão para a amplitude dos impulsos é obtida multiplicando-se as séries de impulsos  $d(t)$ , produzidos sob carga unitária, pela distribuição de carga  $q(t)$ . A formação do produto  $d(t) \cdot q(t)$  está ilustrada graficamente na Figura 1a, onde observa-se o efeito da modulação dos impulsos pela carga. De acordo com o teorema da convolução se dois sinais são multiplicados no domínio do tempo, então suas transformadas de Fourier são convoluídas no domínio da frequência. A convolução de  $D(f)$  e  $Q(f)$  causa réplicas de  $Q(f)$  em intervalos regulares na frequência do defeito  $f_d$ , estendendo-se para infinito em ambas as direções, conforme mostra a Figura 1b.

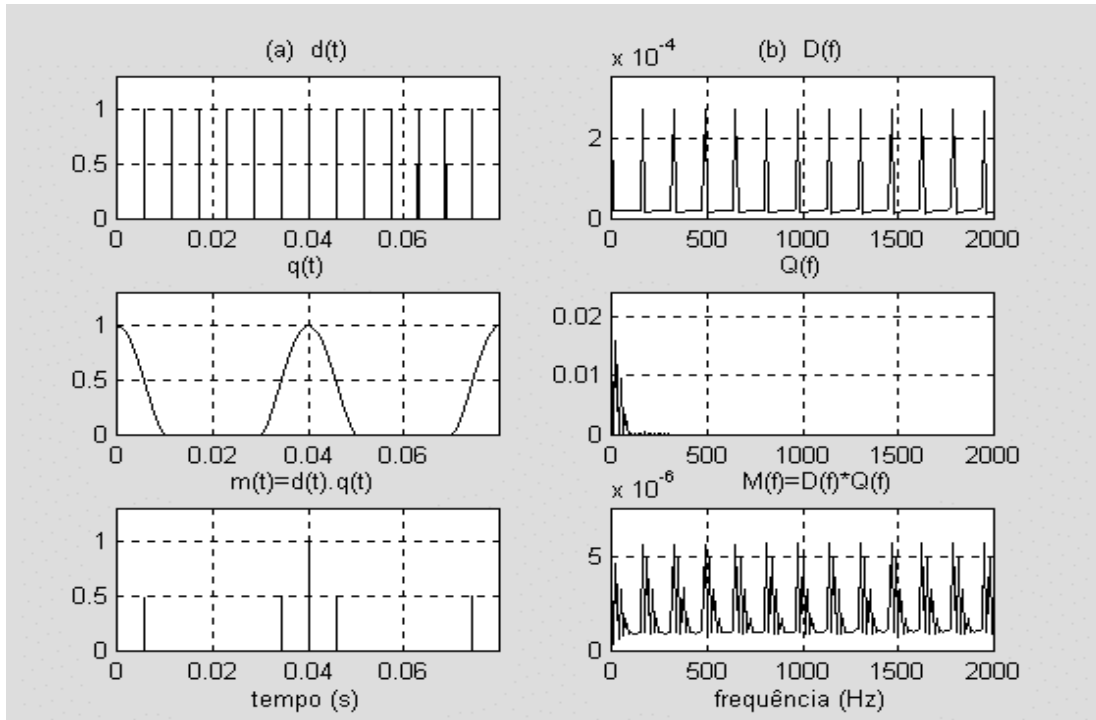


Figura 1 – Impulsos modulados por falha na pista interna do rolamento:  
 (a) sinal no tempo; (b) espectro em frequência.

## 2.4 Transmissão da vibração

Um modelo que representa a amplitude do meio de transmissão da vibração  $a(t)$  pode ser obtido a partir de uma curva contínua e periódica do tipo senoidal, cujo período é igual ao período da rotação do eixo, estendendo-se para infinito em ambas as direções. A transformada de Fourier de  $a(t)$ , denotada por  $A(f)$ , consiste de impulsos no domínio da frequência, separados pela frequência de rotação do eixo  $f_s$ .

## 2.5 Amplitude da resposta não amortecida

A expressão para a amplitude da resposta no transdutor produzida por uma falha no rolamento sob carga radial, sem considerar o efeito do amortecimento estrutural, é dada pelo produto dos impulsos  $d(t) \cdot q(t)$  produzidos no rolamento com a amplitude da função de transferência  $a(t)$ . A formação dos produtos  $d(t) \cdot q(t) \cdot a(t)$  e  $D(f) \cdot Q(f) \cdot A(f)$  são mostrados nas Figuras 2a e 2b.

## 2.6 Decaimento exponencial de um impulso

O decaimento de um impulso unitário pode ser definido pela equação

$$e(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau_e} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\tau_e$  é a constante de tempo de decaimento exponencial. Esta função e seu respectivo espectro também são mostrados graficamente nas Figuras 2a e 2b.

## 2.7 Amplitude da resposta amortecida

Uma expressão geral  $v(t)$  para a resposta medida no rolamento sujeito aos impulsos produzidos pela falha localizada na pista interna é obtida pela convolução da série de impulsos produzidos pela falha com a resposta da máquina:

$$v(t) = [d(t) \cdot q(t) \cdot a(t)] * e(t) \quad (6)$$

Aplicando-se o teorema da convolução, a transformada de  $v(t)$  é dada por

$$V(f) = [D(f) * Q(f) * A(f)] \cdot E(f) \quad (7)$$

As funções  $v(t)$  e  $V(f)$  assim obtidas estão ilustradas nas Figuras 2a e 2b, através do envelope do sinal no tempo e de seu respectivo espectro em frequência.

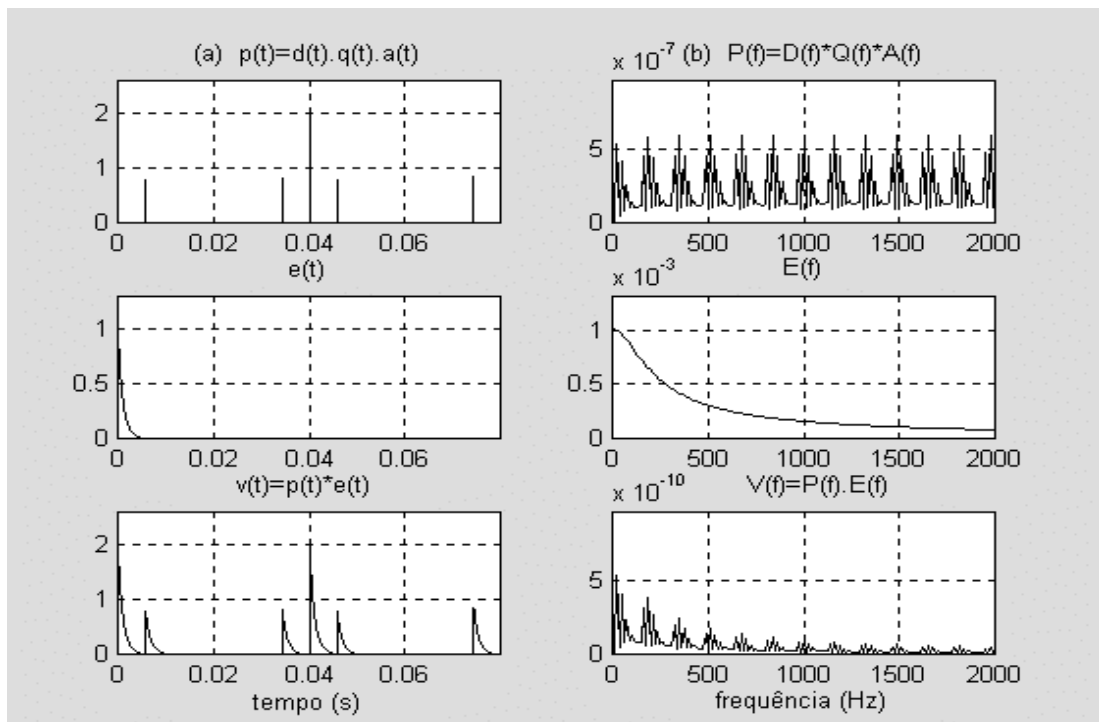


Figura 2 – Resposta no rolamento devido a falha na pista interna:  
(a) envelope no tempo; (b) espectro em frequência.

Analisando o envelope no tempo  $v(t)$  verifica-se que o padrão característico do sinal é formado por impactos de maior amplitude separados pelo período de rotação do eixo, devido à passagem das esferas sobre a falha na posição de carga máxima, junto com impactos secundários que representam a passagem das esferas sobre a falha dentro da zona de carga. No caso do espectro do envelope em frequência  $V(f)$ , observa-se vários lóbulos separados pela frequência característica do defeito  $f_d$ , cujas amplitudes são decrescentes com o aumento da frequência. No modelo obtido não foram considerados os efeitos de ruídos presentes nas medidas, bem como possíveis fontes de vibrações oriundas de outras partes da máquina.

### 3. DISTRIBUIÇÕES TEMPO-FREQUÊNCIA

As distribuições tempo-frequência (TFDs) podem ser expressas em termos do produto geral bilinear proposto por Cohen (1989):

$$\rho_z(t, f) = \iiint e^{j2\pi v(u-t)} g(v, \tau) z(u + \frac{1}{2}\tau) z^*(u - \frac{1}{2}\tau) e^{-j2\pi f\tau} dv du d\tau \quad (8)$$

em que  $z$  é o sinal analítico,  $z^*$  é o seu conjugado, e  $g(v, \bullet)$  determina as características da distribuição. No caso da distribuição de Wigner-Ville (WVD),  $g(v, \bullet) = 1$ .

Após a integração em relação a  $v$ , a Eq. (8) fica

$$\rho_z(t, f) = \iint G(t, \tau) z(u + \frac{1}{2}\tau) z^*(u - \frac{1}{2}\tau) e^{-j2\pi f\tau} du d\tau \quad (9)$$

A expressão na forma discreta da Eq. (9) a ser usada na implementação é obtida por:

$$\rho_z(n, k) = \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-M}^M G(p, m) z(n + p + m) z^*(n + p - m) e^{-j4\pi mk/N} \quad (10)$$

onde  $n$  e  $k$  são as variáveis discretas representando o tempo e a frequência, e os parâmetros  $m$  e  $p$  são inteiros variando de  $-M$  a  $M$ .

#### *Procedimento de Cálculo das TFDs*

Um procedimento geral para implementação das TFDs baseado nas classes de Cohen pode ser expandido em três passos, conforme proposto por Boashash & Reilly (1992):

- i) Formar o produto bilinear  $K_z(n, m) = z(n+m) \cdot z^*(n-m)$ . Pode ser mostrado que este produto apresenta simetria Hermitiana, ou seja

$$K_z(n, m) = \begin{cases} z(n+m) \cdot z^*(n-m) & \text{para } m \geq 0 \\ K_z^*(n, -m) & \text{para } m < 0 \end{cases} \quad (11)$$

- ii) Convoluir a função  $G(n, m)$  com  $K_z(n, m)$  na direção do tempo  $n$ . É comum nas transformadas bilineares a existência de simetria em ambas as direções  $m$  e  $n$ ; esta propriedade deve ser usada para reduzir a quantidade de cálculos e de memória requerida;
- iii) Calcular a transformada de Fourier do produto  $[G(n+m) * K_z(n-m)]$ . Neste caso para cada intervalo de tempo discretizado é obtida uma fatia da TFD, calculada a partir de qualquer rotina FFT. O conjunto destas fatias resulta na distribuição tempo-frequência.

Neste trabalho utiliza-se a distribuição Pseudo-Wigner-Ville (PWVD) implementada através da aplicação de uma janela do tipo Gaussiana deslizante no plano tempo-frequência sobre o sinal analítico antes do cálculo da WVD, conforme o procedimento proposto por Shin & Jeon (1993). Este procedimento resulta numa estrutura com componentes livres dos termos cruzados ou de interferências comuns na WVD. Alguns exemplos de sinais típicos de máquinas operando de forma não-estacionária ou transiente foram testados através do método PWVD visando mostrar a sua eficiência (Silva & Mucheroni, 1998).

#### 4. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

As Figuras 3a e 3b mostram um sinal típico no tempo e seu respectivo espectro em frequência com 20 % de ruído aleatório (valor de pico), representando uma condição de falha localizada na pista interna de rolamento. No modelo adotado foram utilizados 4096 pontos de discretização no tempo, faixa útil de análise de 0 a 20 kHz, frequência central de ressonância  $f_c = 1300 \text{ Hz}$ , velocidade de rotação do eixo  $f_s = 25 \text{ Hz}$  e os parâmetros geométricos do rolamento de esferas FAG E-20, conforme especificações fornecidas na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do rolamento de teste FAG E-20.

Terminologia	Parâmetros	Valor adotado
Número de esferas do rolamento	$n_b$	11 esferas
Diâmetro das esferas	$d$	8,0 mm
Diâmetro no círculo primitivo	$D$	34,0 mm
Frequência de rotação do eixo	$f_s$	25 Hz
Frequência de defeito na pista interna	$f_i = 6,79 f_s$	169,75 Hz

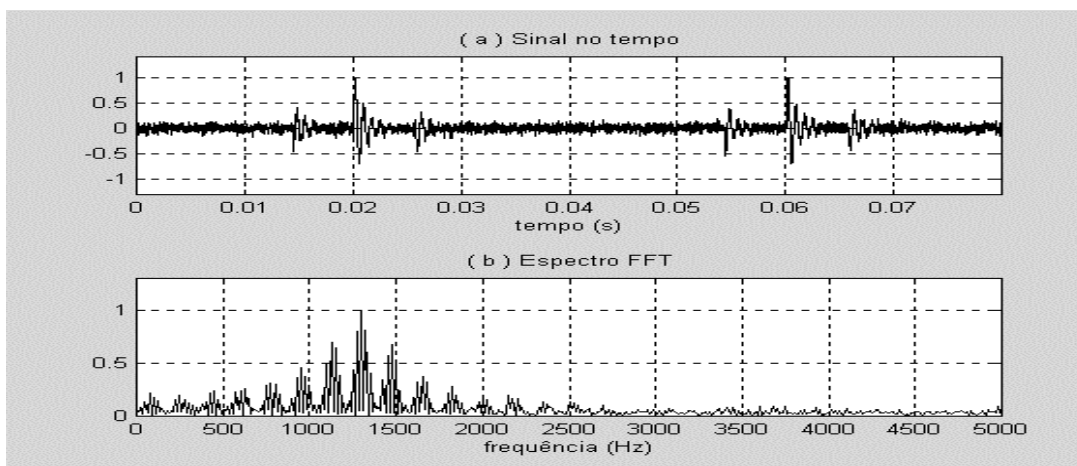


Figura 3 – Sinais de vibração para o modelo de falha na pista interna.

Analisando-se o sinal no tempo através da Figura 3a, verifica-se que não é fácil visualizar a forma e a periodicidade dos impactos secundários, contaminados com a presença do ruído. Já na análise espectral através da Figura 3b, mostrada até 5 kHz, é possível destacar a frequência central de ressonância  $f_c = 1300 \text{ Hz}$ , adotada no modelo, e a frequência característica do defeito  $f_d$  através dos espaçamentos entre os lóbulos.

A Figura 4 mostra a representação conjunta tempo-frequência através do mapa PWVD obtido para o modelo de falha na pista interna. Os sinais no tempo foram normalizados para evidenciar os impactos secundários. A partir desta figura pode-se observar a estrutura típica do mapa PWVD caracterizada por duas concentrações de energia ou “spots” principais, separadas pelo período de rotação do eixo. Num segundo plano observam-se “spots” secundários, cuja distância aos “spots” principais determina o período relacionado com os impactos devido à falha  $T_d = 1/f_d$ . Nota-se ainda que estas concentrações ficam localizadas numa faixa de frequências coincidente com a região que apresenta maior densidade espectral, em torno da frequência central de ressonância  $f_c = 1300 \text{ Hz}$ .

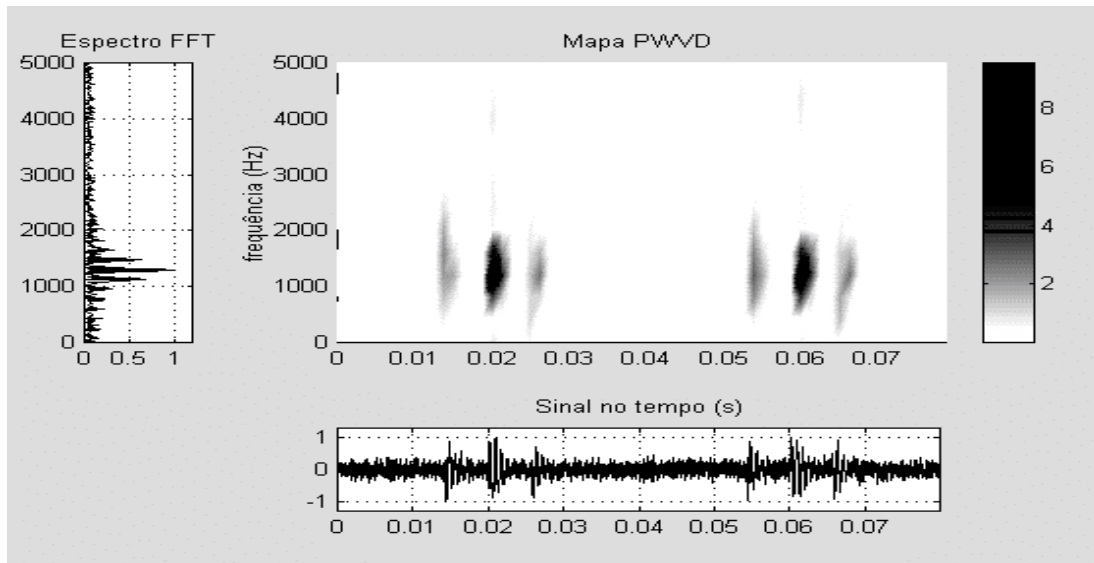


Figura 4 – Mapa PWVD obtido do sinal de vibração normalizado.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

As Figuras 5 e 6 mostram duas representações conjuntas tempo-frequência através dos mapas PWVD obtidos a partir de sinais no tempo medidos para duas condições de falhas no rolamento, introduzidas artificialmente na pista interna, com tamanhos de falhas equivalentes a cerca de  $1 \text{ mm}^2$  e  $2 \text{ mm}^2$ , respectivamente. Analisando a Figura 5 observa-se que embora o espectro FFT apresente várias concentrações de energia ao longo da escala de frequências, a estrutura resultante do mapa PWVD já permite identificar os dois “spots” principais conforme previsto no modelo. Algumas manchas visualizadas em segundo plano representam os impactos secundários. Para uma condição de falha mais severa, Figura 6, a estrutura do mapa PWVD obtido se mostrou bastante coerente em relação ao mapa obtido do modelo, mostrado na Figura 4, validando os resultados. Uma discussão mais completa é feita por Silva (1999).

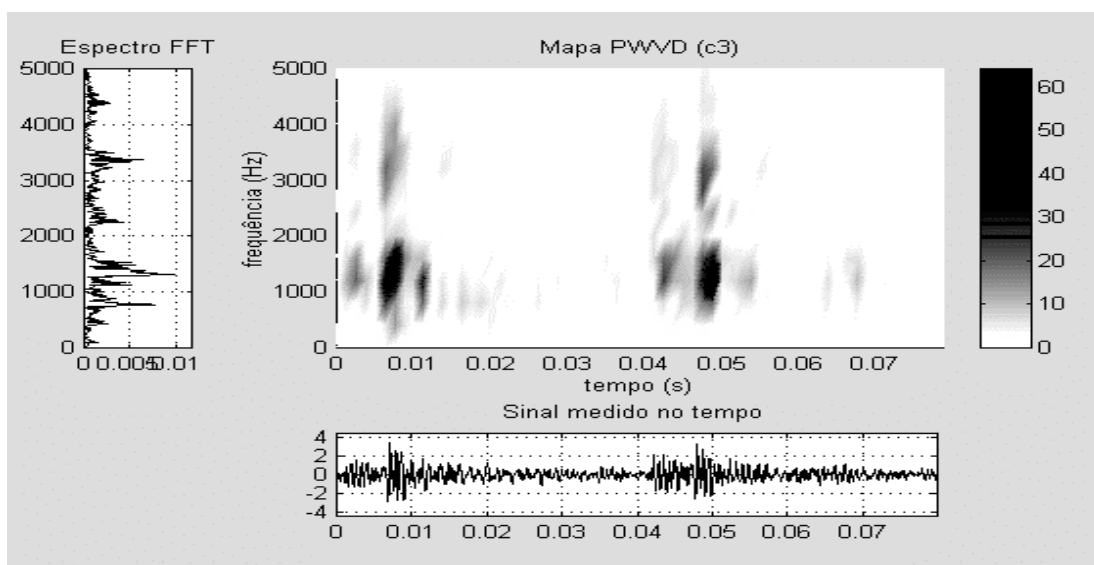


Figura 5 – Mapa PWVD obtido do sinal de vibração: (c3) defeito  $1 \text{ mm}^2$ .



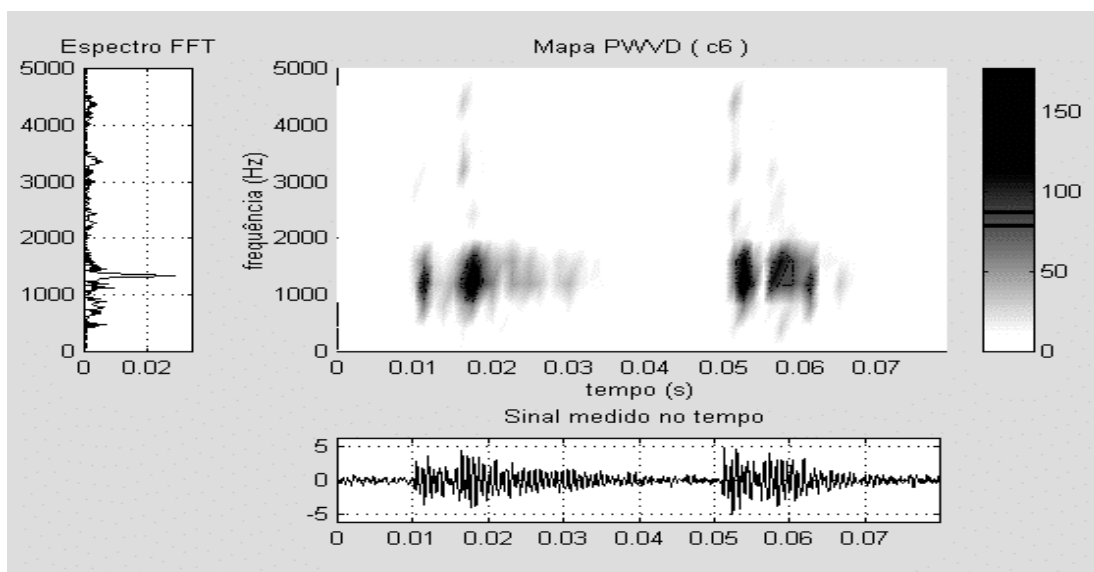


Figura 6 – Mapa PWVD obtido do sinal de vibração: (c6) defeito  $2 \text{ mm}^2$ .

## 6. CONCLUSÕES

Os métodos de análise usuais para detecção de falhas em rolamentos através dos espectros do envelope em frequência apresentam algumas limitações quanto à natureza e complexidade dos sinais. Embora a técnica do envelope se mostre sensível para detecção e localização de falhas incipientes, esta técnica apresenta dificuldades quanto à escolha do filtro passa-banda mais adequado, que depende do conhecimento “a priori” das faixas de frequências de ressonância que foram mais excitadas pela falha. A técnica do envelope também apresenta dificuldades de análise quando a falha localiza-se na pista interna ou nos elementos rolantes, devido à maior complexidade dos espectros obtidos que apresentam linhas adicionais mistas resultantes do efeito das modulações de amplitudes e dos meios de transmissão da vibração. Este problema foi bem discutido no modelo de falha adotado, mostrando que apesar das simplificações feitas já surgem componentes que obscurecem a identificação da frequência característica do defeito.

Por outro lado, o método de análise conjunta tempo-frequência através dos mapas de contorno PWVD apresentaram resultados bastante satisfatórios, especialmente quanto às estruturas típicas obtidas que são de interpretação mais confiáveis. A possibilidade da captura simultânea das características temporais e espectrais dos sinais de vibração, torna esta ferramenta bastante útil na análise de sinais do tipo transientes ou não estacionários. O problema da mudança do conteúdo de energia para os diversos estágios de desenvolvimento de falhas em rolamentos pôde ser bem caracterizado e permite a classificação de padrões através dos contornos dos “spots” de maior energia, o que pode viabilizar a detecção automática de falhas visando a manutenção preditiva.

### *Agradecimentos*

O autor gostaria de expressar seus agradecimentos ao programa CAPES / PICDT / UFPB pela concessão da bolsa de pesquisa e à USP / EESC pela estrutura oferecida no LAMAFE, o que permitiu a realização deste trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boashash, B. & Reilly, A., 1992, Algorithms for time-frequency signal analysis, Chapter 7, in Boashash, B. Time-Frequency Signal Analysis – Methods and Applications, Longman Cheshire, Wiley, pp. 163-181.
- Braun, S. & Datner, B., 1979, Analysis of roller/ball bearing vibrations, Trans. ASME - Journal of Mechanical Design, vol. 101, n. 1, pp. 118-125.
- Cohen, L., 1989, Time-frequency distributions – a review, Proceedings of the IEEE, vol. 77, n. 7, pp. 941-981.
- González, P. S. *et al.*, 1997. Nuevos metodos para el diagnostico de fallas en maquinas rotatorias mediante analisis de vibraciones, Chile, Proceedings of VII Congreso Nacional de Ingenieria Mecanica, pp. 181-184.
- McFadden, P. D. & Smith, J. D., 1984, Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing, Journal of Sound and Vibration, vol. 96, n. 1, pp. 69-82.
- Shin, Y. S. & Jeon, J. J., 1993, Pseudo Wigner-Ville time-frequency distributions and application to machinery condition monitoring, Shock and Vibration, vol. 1, n. 1, pp. 65-76.
- Silva, A. A. & Mucheroni, M. F., 1998, Métodos de análise conjunta tempo-frequência aplicados ao monitoramento de condição de máquinas, Anais do V CEM-NNE 98: Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, vol. 1, pp. 243-250.
- Silva, A. A., 1999, Detecção e análise dinâmica de falhas em rolamentos, Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos, Tese de Doutorado, pp. 240.

### PSEUDO-WIGNER-VILLE DISTRIBUTION APPLIED TO MONITORING OF BALL BEARINGS FAULTS

**Summary.** *This work presents an application of a joint time-frequency analysis method, based on the Pseudo-Wigner-Ville distribution (PWVD). The method was applied to the monitoring of ball bearings faults for predictive maintenance technique development. Initially the vibration signals, corresponding to theoretical models of faults, are investigated and then some results are compared with those obtained in an experimental apparatus with artificially introduced faults in a test ball bearing. The fault mathematical model was validated in situations where the analysis by usual methods are unsatisfactory. The contour maps for the mathematical model and two fault conditions are presented. The main aspects of PWVD method performance are discussed.*

**Key words:** *Predictive maintenance, Vibration monitoring, Time-frequency distributions, Ball bearings.*